UNIDAD EDUCATIVA MONTE TABOR – NAZARET

Área de Matemáticas

Actividades de refuerzo académico

III BACHILLERATO – REMEDIAL

2015 - 2016

Contenido:	
Caligrafía:	**10**

NOMBRE: _______________________________ CURSO: _______

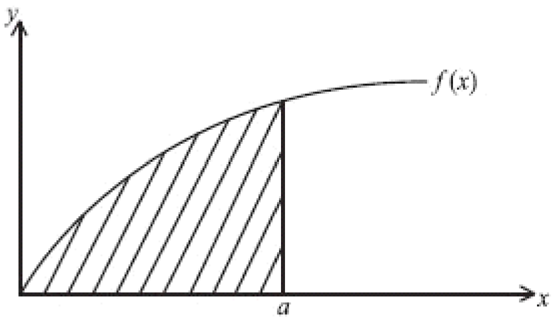
FECHA: __________________ PROFESOR/A: ______________________________

Instrucciones sobre las actividades de refuerzo:

Estas actividades de refuerzo académico tienen como objetivo mejorar el desempeño académico de los estudiantes que han obtenido una nota inferior a 7/10 en el examen supletorio, lo cual indica de acuerdo a la escala cualitativa de evaluación que el estudiante está próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos o no ha alcanzado los aprendizajes requeridos.

Semana 1

1. The shaded region in the diagram below is bounded by $f(x) = \sqrt{x}$, $x = a$, and the x-axis. The shaded region is revolved around the x-axis through 360°. The volume of the solid formed is 0.845π.



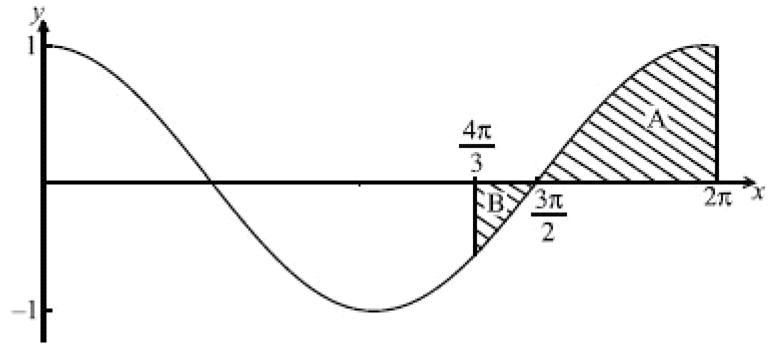
Find the value of a.

(Total 6 marks)

2. Consider the function $f(x) = 4x^3 + 2x$. Find the equation of the normal to the curve of f at the point where $x = 1$.

(Total 6 marks)

3. The following diagram shows part of the graph of $y = \cos x$ for $0 \le x \le 2\pi$. Regions A and B are shaded.



(a) Write down an expression for the area of A.

(1)

(b) Calculate the area of A.

(1)

(c) Find the total area of the shaded regions.

(4)
(Total 6 marks)

4. Let $\int_1^5 3f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

(a) Show that $\int_5^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$.

(2)

(b) Find the value of $\int_1^2 \left(x + f(x)\right)\mathrm{d}x + \int_2^5 \left(x + f(x)\right)\mathrm{d}x$.

(5)
(Total 7 marks)

5. Let $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ and $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(a) Write down

(i) $f'(x)$;

(ii) $g'(x)$.

(2)

(b) Let $h(x) = \mathrm{e}^{-3x}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Find the exact value of $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(4)
(Total 6 marks)

6. A function f has its first derivative given by $f'(x) = (x - 3)^3$.

(a) Find the second derivative.

(2)

(b) Find $f'(3)$ and $f''(3)$.

(1)

(c) The point P on the graph of f has x-coordinate 3. Explain why P is not a point of inflexion.

(2)
(Total 5 marks)

7. Let $h(x) = \frac{6x}{\cos x}$. Find $h'(0)$.

(Total 6 marks)

8. The velocity v m s^{-1} of a particle at time t seconds, is given by $v = 2t + \cos 2t$, for $0 \le t \le 2$.

(a) Write down the velocity of the particle when $t = 0$.

(1)

When $t = k$, the acceleration is zero.

(b) (i) Show that $k = \frac{\pi}{4}$.

(ii) Find the exact velocity when $t = \frac{\pi}{4}$.

(8)

(c) When $t < \frac{\pi}{4}$, $\frac{dv}{dt} > 0$ and when $t > \frac{\pi}{4}$, $\frac{dv}{dt} > 0$.

Sketch a graph of v against t.

(4)

(d) Let d be the distance travelled by the particle for $0 \le t \le 1$.

(i) Write down an expression for d.

(ii) Represent d on your sketch.

(3)
(Total 16 marks)

9. Let $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, for $x > 0$.

(a) Use the quotient rule to show that $g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

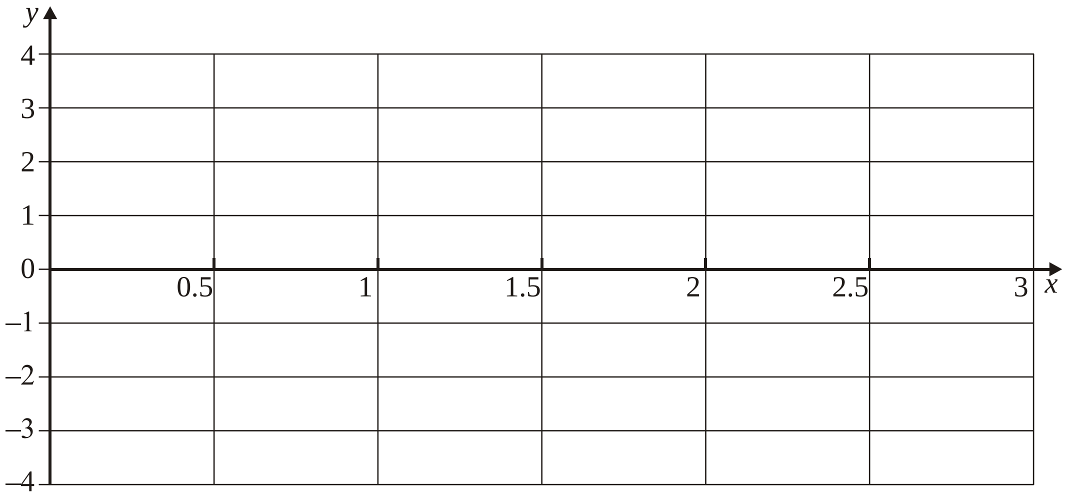
(4)

(b) The graph of g has a maximum point at A. Find the x-coordinate of A.

(3)
(Total 7 marks)

10. Let $f(x) = 2 + \cos(2x) - 2\sin(0.5x)$ for $0 \le x \le 3$, where x is in radians.

(a) On the grid below, sketch the curve of $y = f(x)$, indicating clearly the point P on the curve where the derivative is zero.



(b) Write down the solutions of $f(x) = 0$.

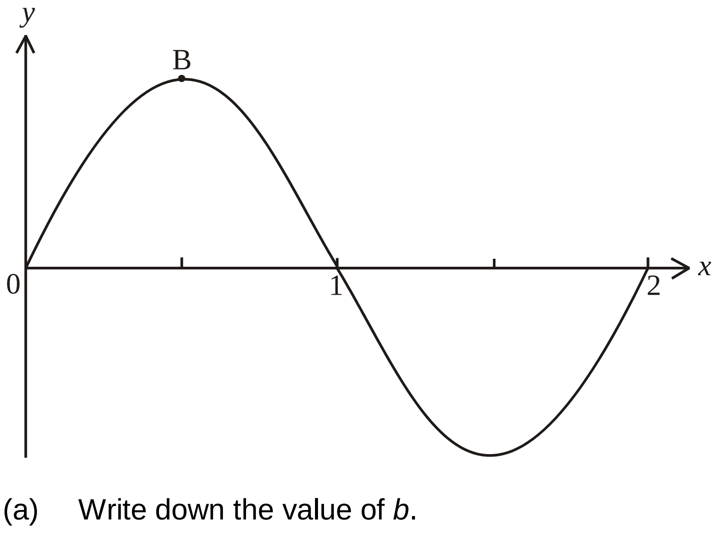
Working:

Answer:

(b) …………………………………………..

(Total 6 marks)

11. Let $f(x) = 6 \sin \pi x$, and $g(x) = 6e^{-x} - 3$, for $0 \le x \le 2$. The graph of f is shown on the diagram below. There is a maximum value at B (0.5, b).



(a) Write down the value of b.

(b) On the same diagram, sketch the graph of g.

(c) Solve $f(x) = g(x)$, $0.5 \le x \le 1.5$.

Working:

Answers:

(a) ....

(b) ....

(Total 6 marks)

12. The population of a city at the end of 1972 was 250 000. The population increases by 1.3% per year.

(a) Write down the population at the end of 1973.

(b) Find the population at the end of 2002.

(Total 6 marks)

13. (a) Given that $(2^x)^2 + (2^x) - 12$ can be written as $(2^x + a)(2^x + b)$, where $a, b \in \mathbb{Z}$, find the value of a and of b.

(b) Hence find the **exact** solution of the equation $(2^x)^2 + (2^x) - 12 = 0$, and explain why there is only one solution.

(Total 6 marks)

14. Let $f(x) = 3 \ln x$ and $g(x) = \ln 5x^3$.

(a) Express $g(x)$ in the form $f(x) + \ln a$, where $a \in \mathbb{Z}^+$.

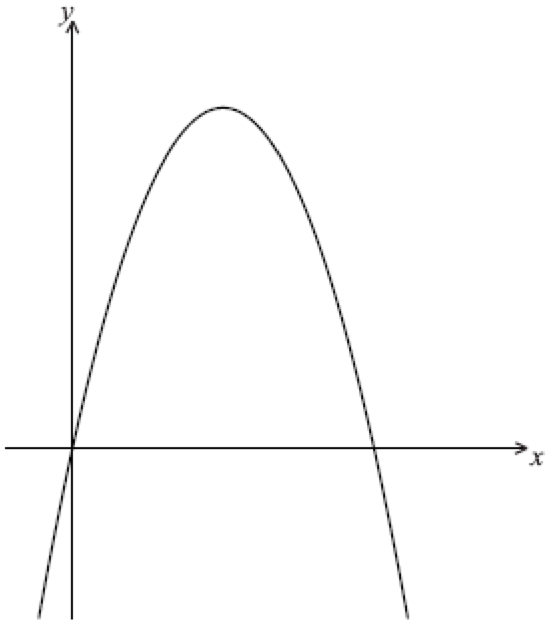
(4)

(b) The graph of g is a transformation of the graph of f. Give a full geometric description of this transformation.

(3)

(Total 7 marks)

15. Let $f(x) = 8x - 2x^2$. Part of the graph of f is shown below.



(a) Find the x-intercepts of the graph.

(4)

(b) (i) Write down the equation of the axis of symmetry.

(ii) Find the y-coordinate of the vertex.

(3)
(Total 7 marks)

16. Solve $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$, for $x > 2$.

(Total 7 marks)

17. Let $f(x) = e^{x+3}$.

(a) (i) Show that $f^{-1}(x) = \ln x - 3$.

(ii) Write down the domain of f^{-1}.

(3)

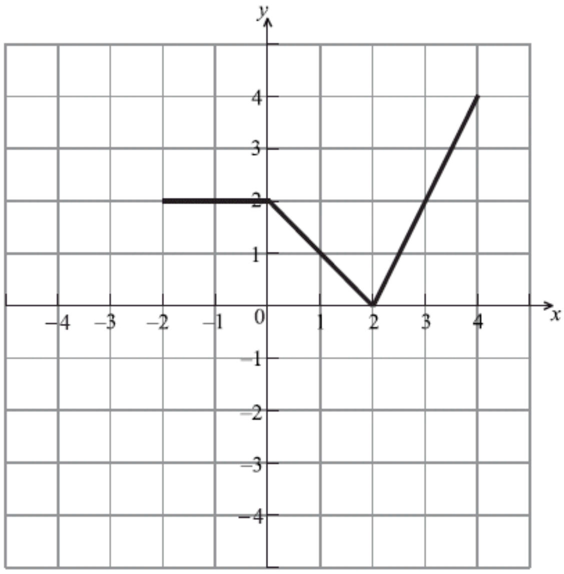
(b) Solve the equation $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

(4)
(Total 7 marks)

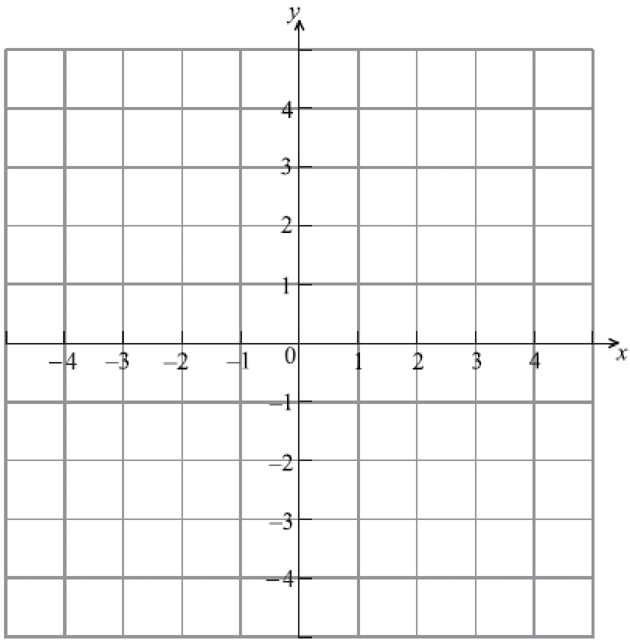
18. Let $f(x) = \sqrt{3}e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x$, for $0 \le x \le \pi$. Given that $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, solve the equation
$f(x) = 0$.

(Total 6 marks)

19. The diagram below shows the graph of a function $f(x)$, for $-2 \le x \le 4$.



(a) Let $h(x) = f(-x)$. Sketch the graph of h on the grid below.



(2)

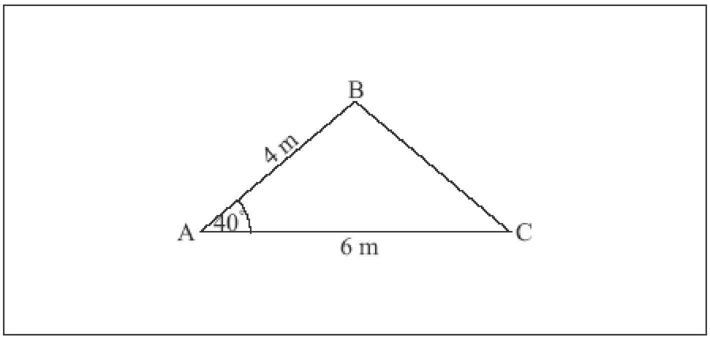
(b) Let $g(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$. The point A(3, 2) on the graph of f is transformed to the point P on the graph of g. Find the coordinates of P.

(3)
(Total 5 marks)

SEMANA 2.

1. (a) Un jardinero pavimentará un área rectangular de 15.4 metros de longitud por 5.5 metros de ancho. Calcule el área total a ser pavimentada. Exprese su respuesta en m^2. **(1)**

(b) El jardinero desea tener un césped triangular ABC, sin pavimento, en el medio del área rectangular, como se muestra en el diagrama de abajo.

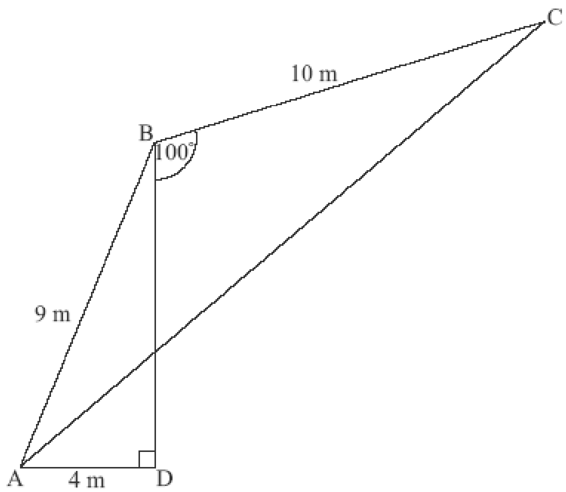


El diagrama no está a escala

(i) Encuentre el perímetro del césped triangular. **(3)**

(ii) Calcule el área del césped. **(2)**

2. En el diagrama, AD = 4 m, AB = 9 m, BC = 10 m, $B\hat{D}A = 90°$ and $D\hat{B}C = 100°$.



(a) Calcule la medida de $A\hat{B}C$.

(3)

(b) Calcule la longitud de AC.

(3)

(Total 6 marks)

3. Raúl, en la casa R, está en la misma orilla de un lago que Sylvia, que está en la casa S. Las casas están separadas 2 kilómetros. Cuando ambos, Raúl y Sylvia están observando hacia el norte, observan una lancha B en el lago, entre las dos casas. Raúl en la casa R puede ver al bote 35° hacia el este con respecto al punto de observación. Sylvia en la casa S puede ver al bote 65° al oeste con respecto a su punto de observación.

(a) Complete el diagrama de abajo, indicando cuál es el ángulo de 35°, y cuál el de 65°.

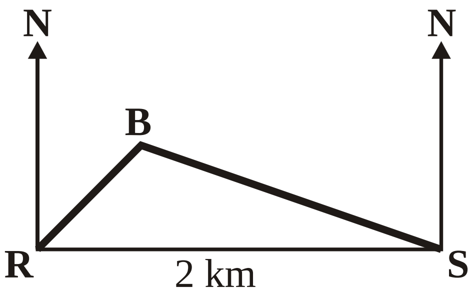


diagram not to scale

(2)

(b) (i) Calcule la medida de $R\hat{B}S$.

(ii) En ese momento, ¿qué tan lejos está el bote (B) de la casa de Raúl (R)?

(3)

(Total 5 marks)

4. Resuelva la ecuación sin $2x = \sqrt{2}\cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

(Total 6 marks)

5. El ángulo θ satisface la ecuación $2\tan^2\theta - \dfrac{5}{\cos\theta} - 10 = 0$, donde θ está en el segundo cuadrante. Encuentre el valor de cos θ.

(Total 6 marks)

6. Demuestre que $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$, luego de hacer las operaciones respectivas se obtiene $\dfrac{2}{\tan\theta}$

(Total 6 marks)

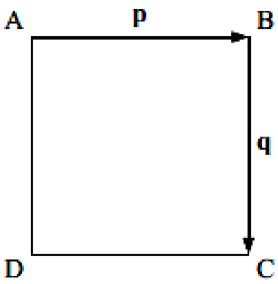
VECTORES

TEMA # 1 [4 puntos máximo]

ABCD es un cuadrado. Sus diagonales AC y BD se intersectan en M. Si $\overline{AB} = \overline{p}$ y $\overline{BD} = \overline{q}$. Encuentre:

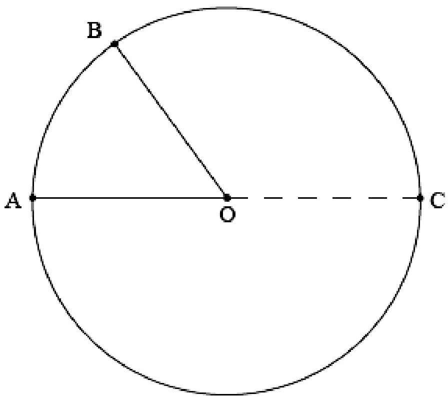
a) $\overline{AM}$

b) $\overline{BM}$



TEMA # 2 [5 puntos máximo]

El diagrama de abajo muestra un círculo con centro O y radio 10 cm. Los puntos A, B y C están sobre la circunferencia del círculo y AC es un diámetro.

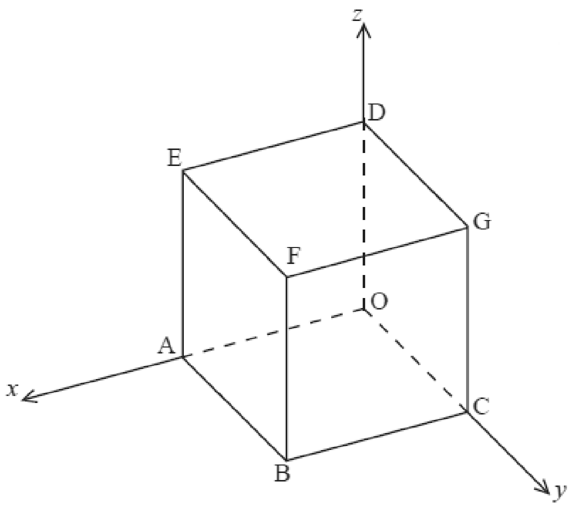


Sea $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$. Las coordenadas del punto A son (– 10;0); del punto B son B(- 5; 5 $\sqrt{3}$), y del punto C(10;0).

a) Escriba una expresión para $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ en términos de los vectores **a** y **b**. [2 puntos]

b) Demuestre que el ángulo ABC es un ángulo recto. [3 puntos]

TEMA # 3 [6 puntos máximo]
El diagrama muestra un cubo OABCDEFG



Sea O el origen, (OA) el eje x, (OC) el eje y, y (OD) el eje Z. Sea M, N y P los puntos medios de FG, DG y CG respectivamente. La coordenada de F es (2, 2, 2).

a) Encuentre los vectores $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ y $\overline{OP}$ en función de los vectores unitarios. [3 puntos].

b) Calcule el área del triángulo MNP. [2 puntos]

c) Escriba la coordenada (x, y, z) en la que la línea AG se encuentra con el plano MNP. [1 punto]

TEMA # 4 [10 puntos máximo]
Los vértices del triángulo PQR están definidos por los vectores posición.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ and } \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Bosqueje los <u>**vectores de posición**</u> anteriores. [1 punto]

b) Demuestre que cos RPQ = 0.5. [5 puntos]

c) Encuentre sin RPQ. [1 puntos]

d) Calcule el área del triángulo PQR, dando su respuesta en la forma $a\sqrt{3}$. [3 puntos]

TEMA # 5 [6 puntos máximo]

(a) Sea $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ p \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{w}$, encuentre el valor de p.

(3)

(b) Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ 5 \end{pmatrix}$. Dado que $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{42}$, encuentre los posibles valores de q.

(3)
(Total 6 marks)

TEMA # 6 [13 puntos máximo]

Considere los puntos A (1, 5, 4), B (3, 1, 2) y D (3, k, 2), con (AD) perpendicular a (AB).

(a) Encuentre

(i) $\overrightarrow{\text{AB}}$;

(ii) $\overrightarrow{\text{AD}}$, dando su respuesta en términos de k.

(3)

(b) Muestre que $k = 7$.

(3)

El punto C es tal que $\overrightarrow{\text{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$.

(c) Encuentre el vector posición de C.

(4)

(d) Encuentre $\cos \text{A}\hat{\text{B}}\text{C}$.

TEMA # 7 [7 puntos máximo]

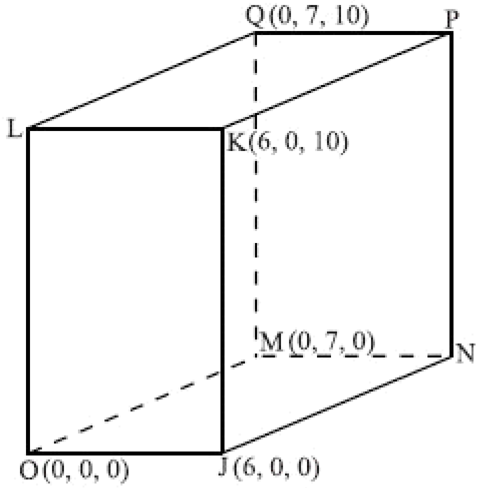
Sean los vectores **v** y **w** como se muestran, para k > 0. El ángulo entre **v** y **w** es $\frac{\pi}{3}$. Encuentre el valor de k.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(3)
(Total 13 marks)

TEMA # 8 [9 puntos máximo]

El diagrama muestra un prisma sólido OJKLMNPQ. El vértice O es (0, 0, 0), J es (6, 0, 0), K es (6, 0, 10), M es (0, 7, 0) y Q es (0, 7, 10).



(a) (i) Muestre que $\overrightarrow{JQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(ii) Encuentre $\overrightarrow{MK}$.

(4)

(ii) Encuentre el ángulo entre (JQ) y (MK).

(5)

LÍMITES Y DERIVADAS

TEMA # 1 [6 puntos máximo]

La función $f'(x) = 2sen\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$

a) Encuentre $f''(x)$.

[2 puntos]

b) Demuestre que $f'''\left(\frac{\pi}{5}\right) = -50$

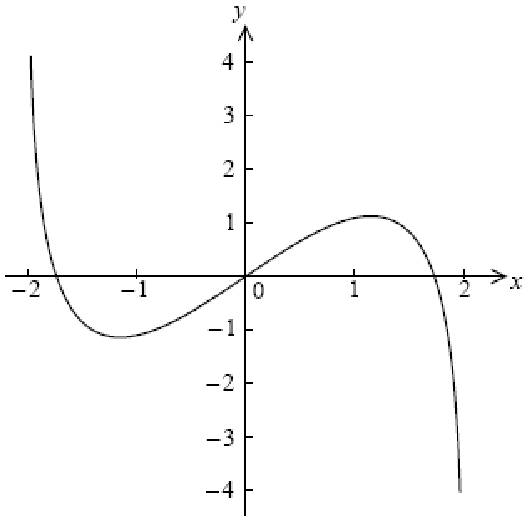
[4 puntos]

TEMA # 2 [5 puntos máximo]

Use las derivadas del sen x y cos x; y el hecho de que $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ para demostrar que la derivada de tan x es $\sec^2$x.

TEMA # 3 [7 puntos máximo]

Considere la función $f(x) = x\ln(4 - x^2)$ para – 2 < x < 2. La gráfica de f se muestra abajo.



a) Sea g(x) = x, h(x) = ln(4 – x^2), encuentre la derivada de g(x) y de h(x). [2 puntos]

b) En base a las respuestas anteriores encuentre la derivada de f(x), considerando como la derivada de un producto. [2 puntos]

Sean P y Q puntos sobre la curva de f en donde la tangente a la gráfica de f es paralela al eje x

c) Calcule los valores de x donde la derivada de f es igual a cero. Puede usar la calculadora. [1 punto]

d) Encuentre las coordenadas de P y Q. [2 puntos]

e) Considere f(x) = k. Escriba todos los valores de k para el cual hay exactamente dos soluciones.
[1 punto]

TEMA # 4 [5 puntos máximo]

Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{5x-1}$.

a) Escriba la ecuación de la asíntota vertical de la función f. [1 punto]

b) Encuentre $f'(x)$. Exprese su respuesta en la forma $\dfrac{ax^2+bx}{(5x-1)^2}$, donde a y b $\in$ **Z**. [4 puntos]

TEMA # 5 [6 puntos máximo]

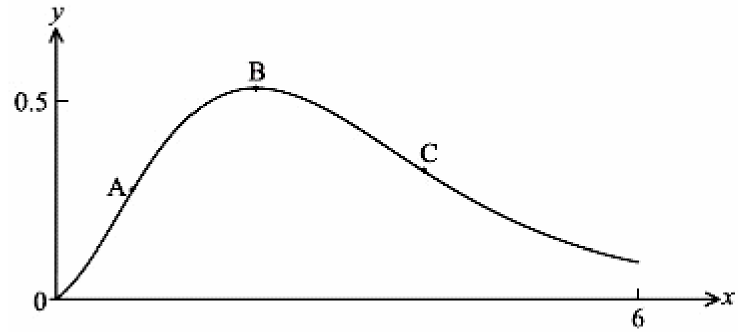
Sea $f(x) = e^{-3x}$ y $g(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

a) Encuentre
   i) f'(x)
   ii) g'(x)
[2 puntos]

b) Sea h(x) = $e^{-3x}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, encuentre el valor exacto de $h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. [4 puntos]

TEMA # 6 [6 puntos máximo]

El diagrama muestra el gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$ for $0 \le x \le 6$. El punto A y el punto C son puntos en donde la segunda derivada es igual a cero, y el punto B es un punto donde la primera derivada es cero.



a) Use la regla del producto para encontrar f ' (x). [2 puntos]
b) Encuentre la coordenada de B. [2 puntos]
c) Encuentre la coordenada de C. [2 puntos]

CÓNICAS, MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

EJERCICIO # 1. [2 puntos]

Determine la ecuación de la circunferencia que tiene centro C(– 2 ;– 4) y pasa por el origen del sistema de ejes coordenados.

EJERCICIO # 2. [4 puntos]

Dada la ecuación de la cónica $4x^2 + 8y^2 - 16x + 16y = 0$, determine las características de la elipse a la que representa.

a) Elipse vertical con ancho de longitud 3.
b) Elipse horizontal con largo de longitud 6.
c) Elipse vertical con ancho al cuadrado de longitud 3.
d) Elipse horizontal con largo al cuadrado de longitud 6
e) Elipse vertical con covértice de longitud 4.

EJERCICIO # 3. [3 puntos]

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ k & 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, encuentre k de tal manera que $A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

EJERCICIO # 4

Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente, usando la regla de Cramer (método de determinantes)

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 3 \\ x + y - 4z &= 2 \\ -2x + 2y + 7z &= -5 \end{aligned}$$

EJERCICIO # 5 [5 puntos]

Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente, utilizando la regla de Cramer (por determinantes)

$$\begin{aligned} 7x + 8y &= 1 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

a) x =1, y = – 1
b) x = – 1, y = 1
c) x = – 1, y = – 1
d) x = 1, y = 1

EJERCICIO # 6 [6 puntos]

Sean las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, determine si el producto de las matrices PQ es igual al producto QP. (Debe realizar los dos productos para la demostración)

EJERCICIO # 7. [2 puntos]

Sin escribir la ecuación en la forma estándar, escriba junto a la ecuación presentada qué tipo de cónica representa, circunferencia, elipse o hipérbola.

a) $5x^2 + 5y^2 - 45 = 0.$ ____________________________________

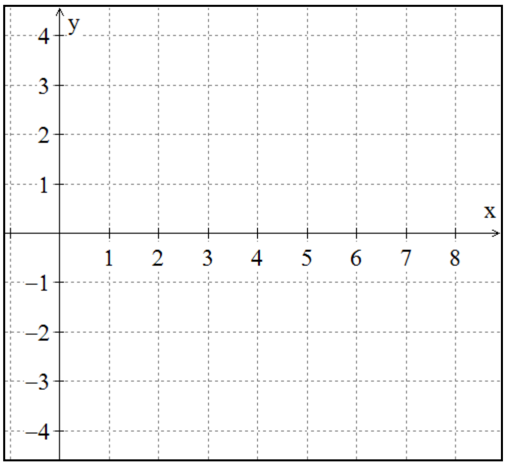
b) $4y^2 - 36x^2 + 4x - 144 = 0$ ____________________________________

EJERCICIO # 8. [8 puntos]

a) Traslade la ecuación general, dada a continuación, a la forma estándar. [4 puntos]

$$5x^2 - 6y^2 - 30x - 12y = -9$$

b) Grafique en el siguiente plano cartesiano la cónica que está representada por la ecuación estándar en la parte a), y muestre claramente las coordenadas de:
   i) Centro de la cónica. [1 punto]
   ii) Vértice de la cónica. [1 punto]
   [4 puntos]



EJERCICIO # 9. [5 puntos]

Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

a) Desarrolle la operación (A + C). [1 punto]

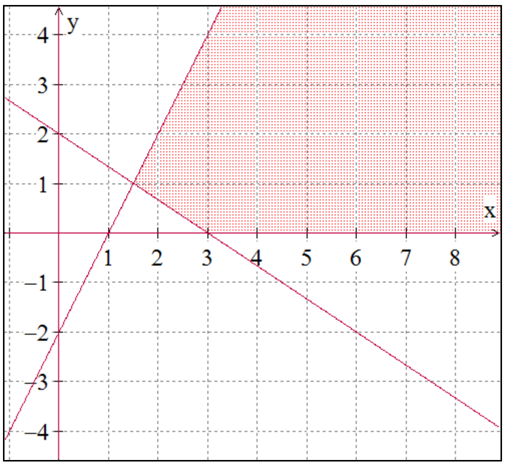
b) Demuestre realizando los respectivos productos que **no se cumple** la siguiente igualdad
   (A + C)B = B(A + C)
   [4 puntos]

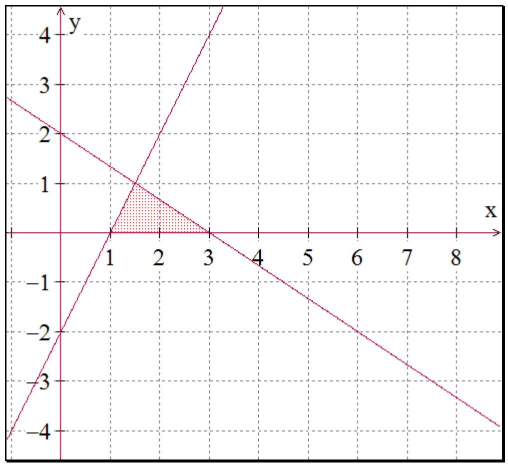
EJERCICIO # 10 [4 puntos]

Para el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$2x + 3y \geq 6$$
$$2x - y \leq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

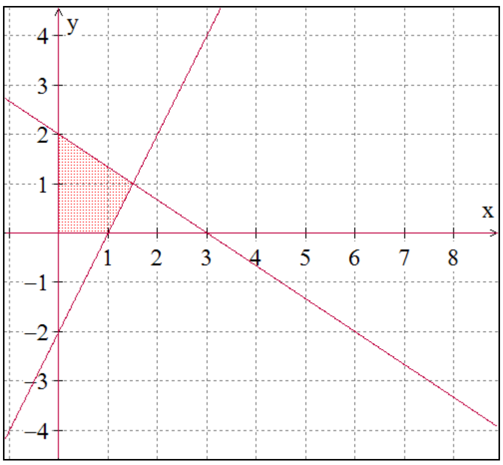
a) Indique cuál de las gráficas muestra la región que representa al conjunto solución de ese sistema. [2 puntos]

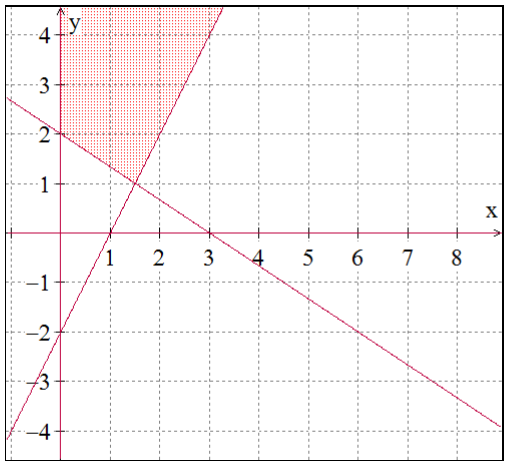




I

II





III

IV

b) Sea C = x + 4y + 3 la función objetivo, encuentre el valor mínimo de la región para esa función objetivo. [2 puntos]

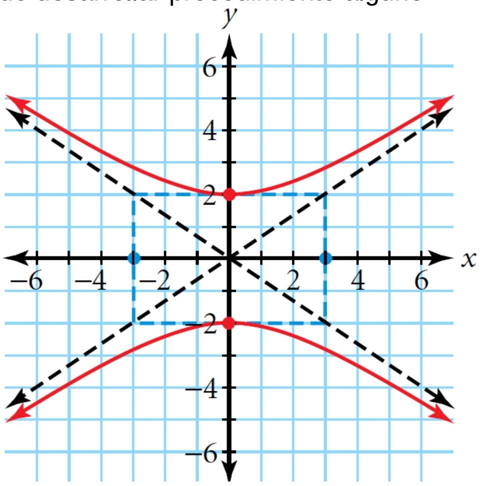
EJERCICIO # 11 [8 puntos]

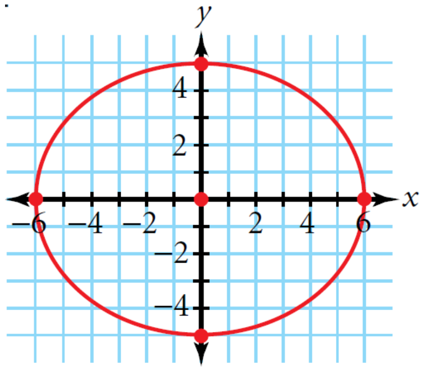
Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente, usando la regla de Cramer (método de determinantes)

$$2x + y - 3z = -5$$
$$5x + 2y - 2z = 8$$
$$3x - 3y + 5z = 17$$

EJERCICIO # 12. [2 puntos]

Escriba la ecuación de la cónica en la forma estándar, en la línea inferior, destinado para ello, sin necesidad de desarrollar procedimiento alguno



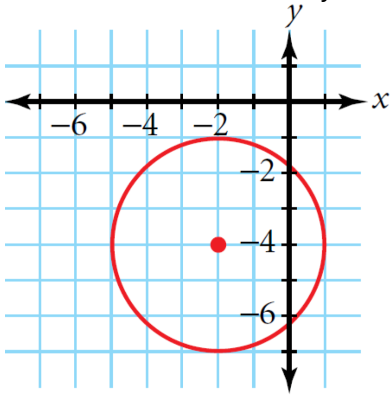


____

____ ____

EJERCICIO # 13. [8 puntos]

a) Escriba las coordenadas del centro de la circunferencia dada, y la longitud del radio. [3 puntos]



____

b) En base a los datos mostrados en la pregunta a) escriba la ecuación de la circunferencia en la forma estándar, que se representa $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. [3 puntos]

____

c) Demuestre que la ecuación, expresada en la forma general, de la circunferencia dada en el gráfico es [2 puntos]

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$$

EJERCICIO # 14. [7 puntos]

Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

c) Desarrolle la operación (A + B), y determine el valor de α de tal manera que

A + B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

. [3 puntos]

d) Demuestre realizando los respectivos productos que **ABC es igual a**

$$ABC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

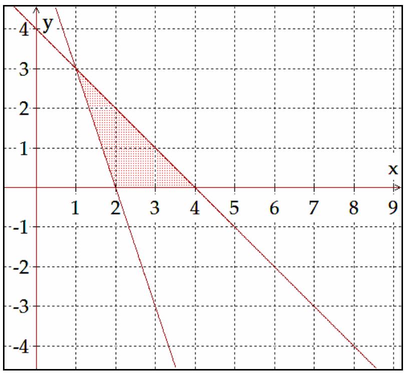
[4 puntos]

<u>EJERCICIO # 15 [4 puntos]</u>

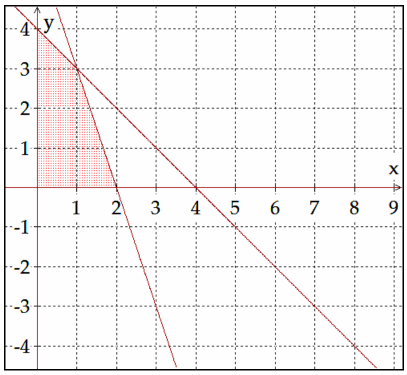
Para el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$x + y \leq 4$$
$$3x + y \geq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

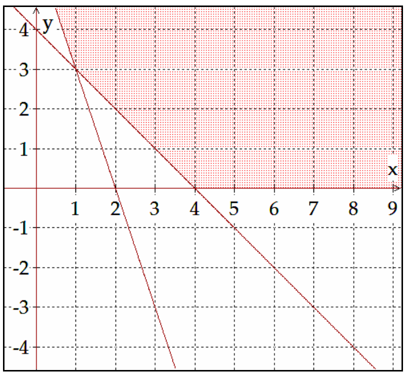
c) Indique cuál de las gráficas muestra la región que representa al conjunto solución de ese sistema. [2 puntos]



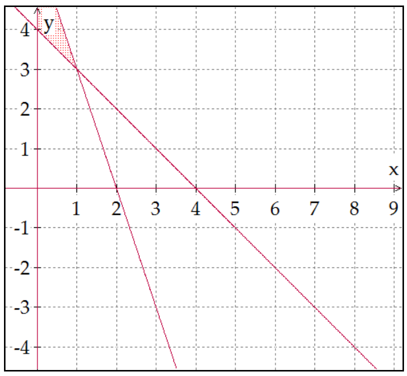
I



II



III



IV

d) Sea C = x + 4y + 3 la función objetivo, encuentre el valor mínimo de la región para esa función objetivo. [2 puntos]

<u>EJERCICIO # 16 [8 puntos]</u>

Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente, usando la regla de Cramer (método de determinantes)

$$2x + y - 3z = 0$$
$$5x + 2y - 2z = 10$$
$$3x - 3y + 5z = 10$$